

静态输出反馈多目标控制的求解方法

刘树博, 赵丁选

(吉林大学机械科学与工程学院, 130025, 长春)

摘要: 研究了连续多面体不确定系统的多目标静态输出反馈控制问题, 此目标静态输出反馈控制问题由双线性矩阵不等式(BMI)给出. 为了计算静态输出反馈增益, 提出了一种基于差分进化算法(DEA)和线性矩阵不等式(LMI)方法的新型混合算法. 新算法的基本思想是通过 DEA 得到控制器的样本, 并将 BMI 问题转化为凸约束优化问题, 进而采用 LMI 方法来最小化系统的性能指标. 以多目标 H_2/H_∞ 控制问题为例, 给出了基于静态输出反馈的多目标控制求解的具体方法, 并用数值仿真例子说明了该算法的有效性.

关键词: 多目标控制; 差分进化算法; 多面体不确定系统

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)07-0049-04

Method for Multi-Object Control Based on Static Output Feedback

LIU Shubo, ZHAO Dingxuan

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract: The static multi-object output feedback control of continuous polytopic uncertain system was discussed, which was given in terms of bilinear matrix inequalities (BMI). A new hybrid control approach based on differential evolution algorithm (DEA) and linear matrix inequality (LMI) was proposed to evaluate the static output feedback gain, whose essential ideal is to transform BMI into convex optimization problems employing the controller samples obtained by DEA. LMI optimization method was then adopted to minimize the system output performance. Taking the H_2/H_∞ control as example, the detailed algorithm of solving multi-object control based on static output feedback was presented. The numerical simulation examples were employed to illustrate the effectiveness of the new hybrid control approach.

Keywords: multi-object control; differential evolution algorithm; polytopic uncertainty system

在实际控制系统中, 静态输出反馈控制的求解问题一直是控制理论中活跃的领域, 通常会归结为双线性矩阵不等式(BMI)约束下的最优化问题. BMI 的求解问题已被证明是 NP-hard 问题, 但目前还没有一种普遍可行的完美求解方法^[1], 因此对 BMI 求解问题的研究具有十分重要的意义.

随机算法^[2] (包括遗传算法、模拟退火算法等) 以简洁、高效和易于并行化的特点, 在并行计算、优化等问题上表现出了很高的效率, 因此越来越受到人们的关注. 近年来, 随机算法被用来解决许多控制

系统设计中难度较大的 NP-hard 问题, 并在鲁棒控制器的设计和分析等问题中取得了一定效果^[3-4]. 然而, 静态输出反馈的多目标控制求解问题却少有报道.

作为一种新兴的随机化算法, 差分进化算法(DEA)具有较强的全局搜索能力和收敛速率, 在解决复杂的全局优化问题方面, DEA 被实践证明是一种有效的全局最优解的搜索算法. 因此, 本文提出了一种基于 DEA 和线性矩阵不等式(LMI)方法的新型混合算法, 以解决基于静态输出反馈的连续多面

体不确定系统的多目标控制问题. 以多目标 H_2/H_∞ 控制问题为例, 给出了基于静态输出反馈的多目标控制求解的具体方法, 并与文献报道的仿真结果进行对比, 进一步证实了该方法的有效性.

1 LMI 区域极点约束的确定

控制理论与实践中的一个基本要求是设计反馈控制律, 将闭环系统的极点配置在指定的位置上, 从而保证闭环系统具有所要求的动态和稳态特性. 由于模型的不确定因素和各种扰动存在, 使得精确极点配置的控制方式不可能得到真正的实现. 实际上只要将闭环系统的极点配置在指定的区域内, 就可以使系统获得满意的性能.

对复平面中的区域 D , 如果存在一个对称矩阵 $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 、矩阵 $M \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 和复变量 s , 使得 $D = \{s \in \mathbf{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ 成立, 则称 D 是一个线性矩阵的不等式区域 (简记为 LMI 区域). 如果用一个线性矩阵不等式来刻画极点区域, 就能借助求解 LMI 的有效方法来方便地求解系统区域极点的配置问题. 对于上述的 LMI 区域 D , 则矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 D 稳定的充分必要条件^[5], 并存在一个对称正定矩阵 X_D , 使得 $M_D(A, X) < 0$, 其中 $M_D(A, X_D) = L \otimes X_D + M \otimes (AX_D) + M^T \otimes (AX_D)^T$.

2 多目标混合控制问题的描述

在大多数情况下, 系统的性能是多方面的, 事实上, 几乎没有系统能够通过单一性能指标对控制系统进行合理、恰当的判断. 依据单一目标设计出的控制器, 很难保证闭环系统的响应满足期望的要求, 因此对多目标控制问题的研究有着重要的意义. 连续多面体不确定系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_1 = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

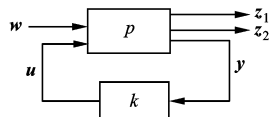
式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $u \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入向量; $y \in \mathbf{R}^p$ 是测量输出向量; $z_1 \in \mathbf{R}^{p_1}$ 、 $z_2 \in \mathbf{R}^{p_2}$ 是控制输出向量; $w \in \mathbf{R}^l$ 是外部扰动向量. 不确定系统矩阵可以表示为

$$S = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\xi) & B_1(\xi) & B_2(\xi) \\ C_1(\xi) & D_{11}(\xi) & D_{12}(\xi) \\ C_2(\xi) & 0 & D_{22}(\xi) \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^p \xi_i \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & 0 & D_{22i} \end{bmatrix} \quad \xi_i \in \Omega \quad (2)$$

$$\Omega = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) : \sum_{i=1}^p \xi_i = 1, \xi_i \geq 0\} \quad (3)$$

为了说明求解多目标控制问题的方法, 本文以具有极点约束的 H_2/H_∞ 多目标控制为例, 其反馈控制结构图如图 1 所示.



p : 多面体不确定系统; k : 静态输出反馈增益

图 1 H_2/H_∞ 多目标静态输出反馈控制结构图

由图 1 可知, $u = ky$, 则闭环系统可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 kC)x + B_1 w \\ z_1 = (C_1 + D_{12} kC)x + D_{11} w \\ z_2 = (C_2 + D_{22} kC)x + D_{21} w \end{cases} \quad (4)$$

具有极点约束配置的 H_2/H_∞ 多目标控制问题可以描述为: 在系统满足给定的 H_∞ 性能和区域极点配置约束下, 设计静态输出反馈控制器, 使系统的 H_2 性能达到最小, 这就等价于存在对称正定矩阵 X_2 、 X_∞ 和 X_D , 并满足以下矩阵不等式^[6]

$$\begin{aligned} \min T_r((C_{2i} + D_{22i} kC)X_2(C_{2i} + D_{22i} kC)^T) \\ (A_i + B_{2i} kC)X_2 + X_2(A_i + B_{2i} kC)^T + B_{1i} B_{1i}^T < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} (A_i + B_{2i} kC)X_\infty + X_\infty(A_i + B_{2i} kC)^T & * & * \\ B_{1i}^T & -I & * \\ (C_{1i} + D_{12i} kC)X_\infty & D_{11i} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$M_D(A + B_2 kC, X_D) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

式中: $*$ 表示由矩阵对称性得到的矩阵块; I 表示单位阶矩阵. 当 $i=1$ 时, 多面体不确定系统就成为确定系统, 但在多目标控制框架下要达到控制目的, 则必须保证式(5)~式(7)同时成立. 显然, 式(5)~式(7)属于 BMI 矩阵不等式的范畴, 因此 BMI 问题是非凸的、NP-hard 问题. 若继续采用单一的 LMI 方法求解会比较困难, 因此本文采用 DEA 与 LMI 相结合的方法, 首先将问题转化为凸约束问题, 然后采用 LMI 进行求解.

3 多目标静态输出反馈控制器设计

3.1 DEA 算法概述

DEA 算法首先是由 Storn 和 Price^[7] 于 1995 年

提出的,大量计算结果表明,与其他随机化算法相比,DEA 算法的优点是收敛速度快、鲁棒性能较好,因此能够更好地找到全局最小值. DEA 算法的操作步骤如下.

步骤 1 DEA 算法在问题的可行解空间随机初始化,由于采用实数编码对种群中的个体进行操作,因此利用 N 个维数为 D 的实数值向量作为每一代的种群,则种群个体可以表示为 $\mathbf{x}_{i,G} (i=1,2,\dots,N)$, 其中 i 表示个体在种群中的序列, N 表示种群数且在进化过程中保持不变.

步骤 2 变异操作是 DEA 算法中最重要的步骤,是指 DEA 按照这种策略从父代种群中生成新的个体进入中间代,它是进化过程中最重要的步骤. 变异向量的产生如下

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G}) \quad (8)$$

式中: r_1, r_2 和 r_3 是随机选择的 3 个互不相同的整数,且与当前目标索引值大小不相同,因此 $N \geq 4$; F 为变异算子,是一个实常数因数,并满足 $F \in (0, 2]$.

步骤 3 为增加干扰参数向量的多样性,引入了交叉操作,则试验向量可以表示为

$$\mathbf{u}_{ji,G+1} = \begin{cases} \mathbf{v}_{ji,G+1} & b(j) \leq c, \quad j = r(i) \\ \mathbf{x}_{ji,G} & b(j) > c, \quad j \neq r(i) \end{cases} \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, D$$

式中: $b(j)$ 为 $[0, 1]$ 之间的均匀分布随机数; c 为用户预定义的交叉概率 ($0 \sim 1$); $r(i) \in [1, 2, \dots, D]$ 为随机选择的维数变量索引,以保证试验矢量至少有一维变量是由变异矢量贡献的. 选择操作是用来获取优良后代的最后操作,如果试验向量的目标函数值优于(即小于)其对应的父代个体的目标函数值,则该试验向量个体就会存活,并成为下一代种群中的个体,否则就会被淘汰. 如此操作将反复进行,直到进化代数达到预先设定值或终止条件得到满足.

3.2 控制器的设计

如图 2 所示,控制器的主要设计步骤有以下几个方面:

(1) 在确定的范围内随机初始化控制种群个体,种群数量通常在 $5D \sim 10D$ 范围内选取. 在样本个体中,对于不满足矩阵不等式(5)~式(7)的个体重新初始化,以便保证初始种群的有效性,缩短进化时间.

(2) 根据不同的多目标要求(可以是 H_2 、广义 H_2 、 H_∞ 、区域极点等多种性能约束的组合),并列写矩阵不等式. 对于确定的多目标控制系统,目标函数为单一的待优化函数,例如在 H_2/H_∞ 多目标控制

系统中,目标函数选取为 $\min T_r((\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{22} \mathbf{k} \mathbf{C}) \mathbf{X}_2 (\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{22} \mathbf{k} \mathbf{C})^T)$. 对于多面体不确定系统,控制器的设计目的是使系统的最差性能指标达到最小,即在 H_2/H_∞ 多目标控制系统中,目标函数选取为

$$J = \max_{\xi \in \Omega} \{ \|T_{z_2 w}\|_2 \}$$

式中: $T_{z_2 w}$ 表示从 w 到 z_2 的闭环传递函数. 通过求解 LMI 不等式得到种群个体的目标函数值.

(3) 种群个体经过变异和交叉操作后,产生了试验向量,对于不满足式(5)~式(7)的个体,在选择操作中将被淘汰.

(4) 确定算法的终止条件:若干相邻代的最优目标函数值的差小于设定误差,或达到设定的最大进化代数(本文采用计算成本较小的后者).

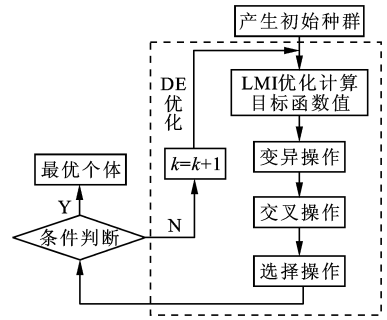


图 2 控制器设计流程图

4 算例分析

4.1 确定系统控制

考虑文献[8]的确定系统,系统矩阵取值如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{1\infty} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在 $\|T_{w_1 z_1}\|_\infty = 1.3$ 的约束条件下,DEA 产生了大小为 10 的初始种群,经过 10 代进化后得到系统 H_2 的大小为 1.414, $k = [-1.992 \ 2]$. 文献[8]在 $\|T_{w_1 z_1}\|_\infty = 1.3$ 的约束下,得到系统 H_2 的大小为 1.565 1. 通过比较,该算法在相同的约束条件下,可使系统的 $\|H\|_2$ 性能达到较小值,因此具有更好的控制效果.

4.2 不确定系统控制

考虑系统^[9]中的 $\mathbf{A}$ 具有多面体不确定性,因此

可描述为

$$A = \begin{bmatrix} -2.98 & a_{12} & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix}$$

$$a_{12} \in [-0.57 \quad 2.43]$$

$$B_2 = [-0.032 \quad 0 \quad 0 \quad -1.6]^T$$

$$B_1 = I_4 C_1 = C_2 = I_4$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = D_{12} = D_{21} = 0; D_{22} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

式中: I_4 表示 4 阶单位矩阵. 将系统极点置于以原点为起点, $2\theta=2\pi/3$ 的锥形区域中, 并选取 H_∞ 的约束为 18. 为了优化系统 H_2 性能, 选取控制样本初始种群的大小为 5, 进化 30 代后得到系统 H_2 的大小为 $\|H\|_2^2=99.832$. 文献中采用了最优控制算法, 在无约束条件下, 得到 $\|H\|_2^2=110.8312$. 因此, 采用新算法设计得到的系统性能显然优于文献中的结果.

4.3 实际应用

在汽车主动悬架控制系统中, 状态反馈控制是在所有变量均可测的条件下进行研究的, 但这只是一种理想情况, 实际上轮胎位移和路面扰动并不容易得到. 动态输出反馈虽然能够利用可测量信号对悬架系统进行控制, 但在设计过程中选择恰当的性能加权函数比较困难^[10], 同时得到的控制器阶次较高, 给实际应用带来了不便, 因此采用静态输出反馈具有更加实际的意义. 主动悬架系统状态空间及车辆参数的取值参见文献^[11].

在 z_2 广义 H_2 范数小于 1 的约束条件下, 设计了多目标静态输出反馈控制器. 主动悬架系统的 z_1 最优 H_2 性能范数为 2.13, 而状态反馈悬架的 H_2 性能范数为 2.04, 因此静态输出反馈能够达到与理想的状态反馈控制相近的效果, 说明了该算法的有效性.

5 结 论

本文对连续不确定系统的静态输出反馈多目标控制问题进行了研究, 鉴于求解 BMI 问题的难度, 采用了 DEA 和 LMI 相结合的新型混合算法, 从而使系统具有良好的鲁棒性和动态特性. 与文献^[8-9]中的结果相比, 本文算法能够使系统性能达到更加令人满意的效果. 结合汽车主动悬架控制的实例, 进

一步证明了该算法的实用性和有效性.

参考文献:

- [1] 时圣柱. 基于 BMI 方法的静态输出反馈控制设计 [D]. 南京: 南京理工大学理学院, 2007.
- [2] MOTWANI R, RAGHAVAN P. Randomized algorithms [J]. ACM Computing Surveys, 1996, 28(1): 33-37.
- [3] CALAFIORE G C, DABBENE F, TEMPO R. Randomized algorithms for probabilistic robustness with real and structured uncertainty [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(12): 2218-2235.
- [4] CALAFIORE G C, DABBEND F. A probabilistic framework for problems with real structured uncertainty in systems and control [J]. Automatica, 2002, 38(8): 1265-1276.
- [5] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 96-121.
- [6] BOYD S, GHAAOUI L E, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [7] STORN R, PRICE K. Differential evolution: a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces [J]. Journal of Global Optimization, 1997, 11(4): 341-359.
- [8] ARZELIER D, PEAUCELLE D. An iterative method for mixed H_2/H_∞ synthesis via static output-feedback [C]// Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, Nevada, USA: IEEE, 2002: 3464-3469.
- [9] GEROMEL J C, PERES P L D, SOUZA S R. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(7): 997-1003.
- [10] 陈虹, 赵桂军, 孙鹏远, 等. H_2 和 H_∞ 主动悬架统一的理论框架与比较 [J]. 汽车工程, 2003, 25(1): 1-6.
CHEN Hong, ZHAO Guijun, SUN Pengyuan, et al. H_2 and H_∞ active suspensions: a unified theoretic framework and comparison [J]. Automotive Engineering, 2003, 25(1): 1-6.
- [11] 孙鹏远. 基于 LMI 优化的主动悬架多目标控制研究 [D]. 长春: 吉林大学通信工程学院, 2004.